TD1 – Opérations sur les matrices, inversion de matrice

Exercice 1 :

On donne les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \\ 4 & -6 & 6 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 14 & 4 & 16 \\ 10 & 11 & 12 \\ 13 & 7 & 15 \end{bmatrix}$$

Calculer :

1. A+B
2. 2A
3. 2A-3B
4. AI
5. AB
6. BA

Exercice 2 :

Soient les matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Si les produits sont possibles, donner AB, AC, AD, BC, CB, DC, ADC. Sinon, précisez pourquoi.

Exercice 3 :

On considère les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Déterminer la matrice B = A – I puis calculer les matrices B^2 et B^3.
2. En déduire la matrice B^n pour tout entier $n \geq 3$.
3. La formule du binôme, appliquée au développement de $(B+I)^n$ permet d'écrire pour tout entier n, $n \geq 3$:

$$A^n = (I+B)^n = I + C_n^1 B + C_n^2 B^2 + C_n^3 B^3 + \ldots + C_n^k B^k + \ldots + C_n^{n-1} B^{n-1} + B^n$$

Où C_n^k représente le nombre de combinaisons de k éléments tirés parmi n, soit le nombre de façons de sélectionner k objets parmi n sans tenir compte de l'ordre, et vaut $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Vérifier que pour $n \geq 3$, $A^n = I + C_n^1 B + C_n^2 B^2$

4. Montrer, à l'aide des résultats précédents, que :

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & n \\ n & 1 & \dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ pour tout entier $n \geq 3$.

Exercice 4 :

La compagnie Logan Primadonna Co. fabrique des tutus et des collants et est en intense compétition avec McCormack Theatrics et Justino Pirouette Inc. Malheureusement, la qualité des produits des trois compagnies laisse à désirer et de nombreux corps de ballets changent régulièrement de marque dans le vain espoir de trouver des collants et des tutus qui vont résister aux contraintes imposées par les danseurs plus d'un jour ou deux. La saison dernière, le corps de ballet Avante-Garde a acheté des produits aux trois compagnies selon le tableau présenté ci-dessous.

Achats

	Logan Primadona	McCormack Theatrics	Justino Pirouette
Tutus	20	10	20
Collants	20	30	10

Le prix des produits est indiqué dans la table suivante.

Prix unitaire (€)

	Logan Primadona	McCormack Theatrics	Justino Pirouette
Tutus	30	40	50
Collants	20	20	15

1. Soit Q la matrice 2×3 correspondant aux achats et C la matrice 2×3 correspondant aux prix unitaires. Calculer le produit ${}^tCQ$. Que représentent les éléments diagonaux du produit ?
2. Avec les matrices C et Q précédentes, calculer le produit $C\,{}^tQ$. Que représentent les éléments diagonaux du produit ?

Exercice 5 :

Inverser les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$