TD1 – Corrigé

Exercice 1 :

1. $A+B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & -3 & 5\\ 4 & -6 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}14 & 4 & 16\\ 10 & 11 & 12\\ 13 & 7 & 15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & 5 & 18\\ 13 & 8 & 17\\ 17 & 1 & 21\end{bmatrix}$

2. $2A=2\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & -3 & 5\\ 4 & -6 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 4\\ 6 & -6 & 10\\ 8 & -12 & 12\end{bmatrix}$

3. $2A-3B=2\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & -3 & 5\\ 4 & -6 & 6\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}14 & 4 & 16\\ 10 & 11 & 12\\ 13 & 7 & 15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-42 & -10 & -44\\ -24 & -39 & -26\\ -31 & -33 & -33\end{bmatrix}$

4. $AI=A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & -3 & 5\\ 4 & -6 & 6\end{bmatrix}$

5. $AB=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & -3 & 5\\ 4 & -6 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}14 & 4 & 16\\ 10 & 11 & 12\\ 13 & 7 & 15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}36 & 25 & 42\\ 77 & 14 & 87\\ 74 & -8 & 82\end{bmatrix}$

6. $BA=\begin{bmatrix}14 & 4 & 16\\ 10 & 11 & 12\\ 13 & 7 & 15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & -3 & 5\\ 4 & -6 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}76 & -94 & 144\\ 81 & -95 & 147\\ 81 & -98 & 151\end{bmatrix}$

Exercice 2 :

AB est impossible car A a moins de colonnes que B n'a de lignes.
AC est impossible car A a moins de colonnes que C n'a de lignes..

$AD=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -7 & 1\\ 7 & 7 & 2\end{bmatrix}$

BC est impossible car B a moins de colonnes que C n'a de lignes.

$CB=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ -1\\ 2\end{bmatrix}$

$$DC = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 3 \\ -1 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$ADC = (AD)C = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 1 \\ 7 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -17 & 1 \\ 7 & 15 & 9 \end{bmatrix}$$

Exercice 3 :

1. $B = A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. On trouve également $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. B^3 est la matrice nulle.

2. Pour $n \geq 3$, $B^n = B^3 \times B^{n-3}$ avec $n - 3 \geq 0$. Comme B^3=0, alors $\forall n \geq 3, B^n = 0$.

3. Dans le développement du binôme toutes les matrices B^k, $k \geq 3$ sont égales à la matrice nulle. On a bien :

$$\forall n \geq 3, A^n = I + C_n^1 B + C_n^2 B^2 = I + \frac{n!}{(n-1)!} B + \frac{n!}{2(n-2)!} B^2 = I + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2$$

4. D'après le calcul précédent,

$$\forall n \geq 3, A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & n \\ n & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & n \\ n & 1 & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 4 :

1. $C = \begin{bmatrix} 30 & 40 & 50 \\ 20 & 20 & 15 \end{bmatrix}$ et $Q = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 20 \\ 20 & 30 & 10 \end{bmatrix}$

$${}^t CQ = \begin{bmatrix} 30 & 20 \\ 40 & 20 \\ 50 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & 10 & 20 \\ 20 & 30 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 & 900 & 800 \\ 1200 & 1000 & 1000 \\ 1300 & 950 & 1150 \end{bmatrix}$$

Les éléments diagonaux représentent le coût par compagnie pour le corps de ballet Avant-Garde. Ainsi Avant-garde a payé un total de 1000€ à Logan, 1000€ à McCormack et 1150€ à Justino.

2. $C\,{}^t Q = \begin{bmatrix} 30 & 40 & 50 \\ 20 & 20 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 10 & 30 \\ 20 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 & 2300 \\ 900 & 1150 \end{bmatrix}$

Les éléments diagonaux représentent le coût par produit. Ainsi, Avante-Garde a payé un total de 2000€ pour des tutus et 1150€ pour des collants.

Exercice 5 :

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ alors $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{a \times d - b \times c} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{3\times3-5\times2}\begin{bmatrix}3 & -5\\ -2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & 5\\ 2 & -3\end{bmatrix}$$

On vérifie que $A\times A^{-1} = I$

$$\begin{bmatrix}3 & 5\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 5\\ 2 & -3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

On vérifie que $A^{-1}\times A = I$

$$\begin{bmatrix}-3 & 5\\ 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 5\\ 2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix}5 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix}$$

On vérifie que $B\times B^{-1} = I$ et que $B^{-1}\times B = I$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}$$

On vérifie que $C\times C^{-1} = I$ et que $C^{-1}\times C = I$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 0\end{bmatrix}\left|\,\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right.$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -2 & -2\end{bmatrix}\left|\,\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\right| \begin{matrix}\\ \\ L_3-L_1\to L_3\end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}\left|\,\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{bmatrix}\right| \begin{matrix}\\ -L_2\to L_2\\ L_3+2L_2\to L_3\end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\left|\,\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4}\end{bmatrix}\right| \begin{matrix}\\ \\ \frac{-1}{4}L_3\to L_3\end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\left|\,\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4}\end{bmatrix}\right| \begin{matrix}\\ L_2+L_3\to L_2\\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\left|\,\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4}\end{bmatrix}\right| \begin{matrix}L_1-2L_3\to L_1\\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$D^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4}\end{bmatrix}$$

On vérifie que $D\times D^{-1}=I$ et que $D^{-1}\times D=I$

$$\left[\begin{matrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 4 & -3\\ 3 & 6 & -5\end{matrix}\right]\left|\,\left[\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right]\right.$$

$$\left[\begin{matrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -7\\ 0 & 3 & -11\end{matrix}\right]\left|\,\left[\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 1\end{matrix}\right]\right|\begin{matrix}\\ L_2-2L_1\to L_2\\ L_3-3L_1\to L_3\end{matrix}$$

$$\left[\begin{matrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -7\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right]\left|\,\left[\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -2\end{matrix}\right]\right|\begin{matrix}\\ \\ 3L_2-2L_3\to L_3\end{matrix}$$

$$\left[\begin{matrix}-2 & 0 & -11\\ 0 & 2 & -7\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right]\left|\,\left[\begin{matrix}-4 & 10 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -2\end{matrix}\right]\right|\begin{matrix}L_2-2L_1\to L_1\\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\left[\begin{matrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -7\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right]\left|\,\left[\begin{matrix}-4 & 34 & -22\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -2\end{matrix}\right]\right|\begin{matrix}L_1+11L_3\to L_1\\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\left[\begin{matrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right]\left|\,\left[\begin{matrix}-4 & 34 & -22\\ -2 & 22 & -14\\ 0 & 3 & -2\end{matrix}\right]\right|\begin{matrix}\\ L_2+7L_3\to L_2\\ \\ \end{matrix}$$

$$\left[\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right]\left|\,\left[\begin{matrix}2 & -17 & 11\\ -1 & 11 & -7\\ 0 & 3 & -2\end{matrix}\right]\right|\begin{matrix}\frac{-1}{2}L_1\to L_1\\ \frac{1}{2}L_2\to L_2\end{matrix}$$

$$E^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -17 & 11\\ -1 & 11 & -7\\ 0 & 3 & -2\end{bmatrix}$$

On vérifie que $E\times E^{-1}=I$ et que $E^{-1}\times E=I$

$$F^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 4 & -2 & -1\\ \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

On vérifie que $F\times F^{-1}=I$ et que $F^{-1}\times F=I$

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

On vérifie que $G \times G^{-1} = I$ et que $G^{-1} \times G = I$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right. \begin{matrix} \\ L_2 - L_1 \to L_2 \\ L_3 - L_1 \to L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right. \begin{matrix} \\ \\ L_3 + L_2 \to L_3 \end{matrix}$$

On arrive à une ligne de 0 et on ne peut plus continuer le pivot. H est une matrice singulière (non inversible) et son rang est 2 (et non 3). Il existe une relation entre les lignes : $L_3 + L_2 = 2L_1$.

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On vérifie que $J \times J^{-1} = I$ et que $J^{-1} \times J = I$

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ -4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

On vérifie que $K \times K^{-1} = I$ et que $K^{-1} \times K = I$