TD2 – Corrigé

Exercice 1 :

1. Soit $E=\{f:\Re\to\Re\}$. Alors $F_1 \subset E$
F_1 est-il un sous espace vectoriel de E ?
Soit f / f(x) = x
$f\in F_1$ donc $F_1 \neq Ø$
$(f_1,f_2)\in F_1^2$. $f_1+f_2\in F_1$?
$f_1+f_2(0)=f_1(0)+f_2(0)=0+0=0\rightarrow f_1+f_2\in F_1$
$(f,\lambda)\in F_1\times\Re$. $\lambda f\in F_1$?
$(\lambda f)(0)=\lambda f(0)=\lambda\times 0=0\rightarrow \lambda f\in F_1$
F_1 est un espace vectoriel.

2. $P_1(x)=x^3$
$P_2(x)=-x^3$
$(P_1+P_2)(x)=0$ et degré$(P_1+P_2)=-\infty$
Donc F_2 n'est pas un espace vectoriel.

3. $(1,1)+(1,1)=(2,2)\notin F_3$ donc F_3 n'est pas un espace vectoriel.

4. $1\in F_4$ donc $F_4 \neq Ø$
Soit $(x_1,2x_1)et(x_2,2x_2)\in F_4\ alors\,(x_1+x_2,2(x_1+x_2)\in F_4$
Soit $\lambda\in\Re$. $(x,2x)\in F_4 alors (\lambda x,2(\lambda x))\in F_4$
F_4 est un espace vectoriel.

Exercice 2 :

1. $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ appartient à l'ensemble considéré donc il est non vide.

La somme de deux matrices anti-diagonales 3x3 est une matrice anti-diagonale 3x3 :

$A=\begin{bmatrix}0&0&a\\0&b&0\\c&0&0\end{bmatrix}$ et $B=\begin{bmatrix}0&0&d\\0&e&0\\f&0&0\end{bmatrix}$. $A+B=\begin{bmatrix}0&0&a+d\\0&d+e&0\\d+f&0&0\end{bmatrix}$

Le produit d'une matrice anti-diagonale par une nombre est une matrice anti-diagonale.

$$\lambda A=\begin{bmatrix}0&0&\lambda a\\0&\lambda b&0\\\lambda c&0&0\end{bmatrix}$$

L'ensemble E est non vide, stable par addition et multiplication par un scalaire. E est donc un espace vectoriel.

2. On peut poser la base $e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ qui sont 3 « vecteurs » indépendants et qui génèrent l'espace vectoriel des matrices anti-diagonales 3x3 : $A=ae_1+be_2+ce_3$
3. La dimension de cet espace est donc 3.

Exercice 3 :

1. $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ appartient à l'ensemble donc il est non vide.

La somme de deux matrice 2x3 est une matrice 2x3 :
$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \varphi \end{bmatrix}$. $A+B = \begin{bmatrix} a+\alpha & b+\beta & c+\gamma \\ d+\delta & e+\varepsilon & f+\varphi \end{bmatrix}$
Le produit d'une matrice 2x3 par un nombre est une matrice 2x3 :
$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ \lambda d & \lambda e & \lambda f \end{bmatrix}$
L'ensemble est non vide, stable par addition et multiplication par un scalaire. Donc on a bien un espace vectoriel.
2. On peut poser la base : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ qui sont 6 « vecteurs » (matrices) indépendants et génèrent l'espace vectoriel des matrices 2x3.
3. La dimension de cet espace est donc 6.

Exercice 4 :

1. On montre facilement que $0 \in E$. De plus, si on prend deux matrices M et M′ dans E, on a X(M+M′)Y = XMY +XM′Y = 0. Avec λ réel, on a X(λM)Y = λ(XMY) = 0. L'ensemble E est non vide, stable par addition et multiplication par un scalaire. C'est donc un sous-espace vectoriel de l'ensemble des matrices réelles.
2. Si on pose $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in E$, on a XMY = −2a−b+6c+3d = 0, soit b = −2a+6c+3d. On montre alors facilement que les matrices $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} et\, M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ forment une base de E. cet espace est donc de dimension 3.
3. Soit $M \in E$. On peut écrire $M = \begin{bmatrix} a & -2a+6c+3d \\ c & d \end{bmatrix} = M_F + M_G$ avec
$M_F = \begin{bmatrix} 0 & 6c+3d \\ 0 & 2c+d \end{bmatrix} \in F$ et $M_G = \begin{bmatrix} a & -2a \\ c & -2c \end{bmatrix} \in G$. Tout vecteur de E peut donc s'écrire sous forme de somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. On a donc montré E = F + G.

Exercice 5 :

1. Matrice de rotation d'un angle θ : R_θ

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

2. $R_\theta^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

3. $R_{2\theta} = R_\theta R_\theta = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

4. $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ et $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

Exercice 6 :

1. $\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{matrix}\right] \left| \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right] \right.$

$$\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{-\sin\theta}{\cos\theta} \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{matrix}\right] \left| \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\cos\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right] \right| \frac{L_2}{\cos\theta} \to L_2$$

$$\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{-\sin\theta}{\cos\theta} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\cos\theta} \end{matrix}\right] \left| \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\cos\theta} & 0 \\ 0 & \dfrac{-\sin\theta}{\cos\theta} & 1 \end{matrix}\right] \right| -\sin\theta L_2 + L_3 \to L_3$$

$$\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{-\sin\theta}{\cos\theta} \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right] \left| \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\cos\theta} & 0 \\ 0 & -\sin\theta & 1 \end{matrix}\right] \right| \cos\theta L_3 \to L_3$$

$$\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right] \left| \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & 1 \end{matrix}\right] \right| \frac{\sin\theta}{\cos\theta} L_3 + L_2 \to L_2$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & 1 \end{bmatrix}$$

On vérifie que $A \times A^{-1} = I$ et $A^{-1} \times A = I$.

2. La matrice A représente une rotation d'angle θ autour de l'axe Oz dans une espace à 3 dimensions.

3. La matrice inverse est donc la matrice qui représente une rotation d'angle -θ autour de l'axe Oz, soit la matrice trouvée précédemment.

Exercice 7 :

1. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| \begin{matrix} L_2 \to L_1 \\ L_1 \to L_2 \\ \end{matrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right. -L_2 \to L_2$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right.$

$A_{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

On vérifie que $A \times A^{-1} = I$ et $A^{-1} \times A = I$.
2. la transformation géométrique représentée par cette matrice est :
x’ = -y
y’ = x
z’ = z
Dans le plan xOy, on reconnaît une rotation d’angle 90°. Comme la cote est conservée (z’ = z), on en déduit que l’on a affaire à une rotation de 90° autour de l’axe Oz.
3. L’inverse de cette transformation est une rotation d’angle -90°, c’est-à-dire
X’ = y
Y’ = -x
Z’ = z

La matrice inverse est donc $A_{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercice 8 :

Les matrices correspondant aux rotations de -45° autour des axes 0x et 0z sont :

$$R_x(-45°) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \text{ et } R_z(-45°) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc la rotation désirée a la transformation géométrique suivante :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

La transformation du point donne donc :

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$