



TD3 – Corrigé

Exercice 1 :

$$1. N = \begin{matrix} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \\ \begin{matrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

2. Le rang de la matrice est inférieur ou égal à 4. Or les 4 premiers vecteurs colonnes sont indépendants (voir position des 1). Donc le rang de cette matrice est 4.

On peut montrer que $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 + \lambda_4 V_4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ et réciproquement.

3. La dimension du noyau de l'application définie par cette matrice est donc $5-4 = 1$ (5 est la dimension de l'espace des vitesses).

4. L'équilibre correspond à $NV=0$. A partir de ce produit on obtient :

$$\begin{cases} V_1 - V_2 = 0 \\ V_3 - V_4 = 0 \\ V_2 - V_5 = 0 \\ V_4 - V_5 = 0 \end{cases} \text{ dont on déduit : } V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = V_5$$

5. Un vecteur de base du noyau est donc le vecteur colonne

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Exercice 2 :

$$1. N = \begin{matrix} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 \\ \begin{matrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

2. Le rang de la matrice est inférieur ou égal à 3. Or les trois premiers vecteurs sont indépendants. Donc le rang de cette matrice est 3.

3. L'espace des vitesses est de dimension 6, donc le noyau est de dimension $6-3 = 3$.

4. L'équilibre correspond à $NV=0$. A partir de ce produit on obtient :

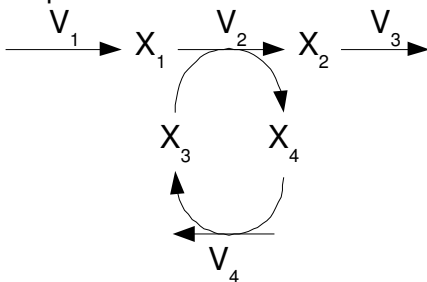
$$\begin{cases} V_1 - V_2 - V_4 = 0 \\ V_2 - V_3 + V_5 = 0 \\ V_4 - V_5 - V_6 = 0 \end{cases} \text{ dont on déduit : } \begin{cases} V_1 = V_2 + V_4 = V_2 + V_5 + V_6 \\ V_3 = V_2 + V_5 \\ V_4 = V_5 + V_6 \end{cases}$$

5. Base du noyau $(V_2 + V_5 + V_6, V_2, V_2 + V_5, V_5 + V_6, V_5, V_6)$, soit

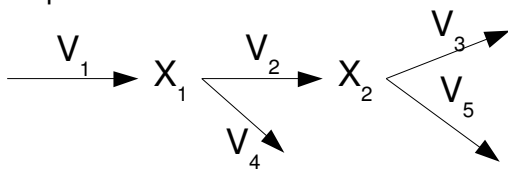
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 3 :

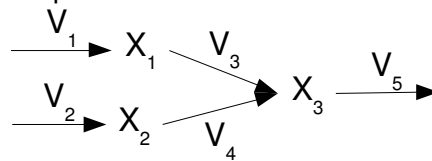
A a pour réseau :



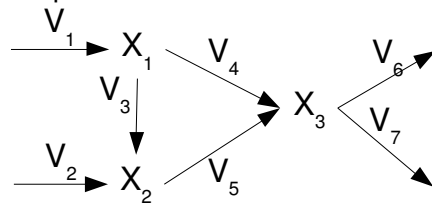
B a pour réseau :



C a pour réseau :



D a pour réseau :



Exercice 4 :

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (4 - \lambda)x + 2y = 0 \\ x + (3 - \lambda)y = 0 \end{cases}$$

$$(\lambda^2 - 7\lambda + 10)x = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 5)x = 0$$

1. Si $\lambda \neq 2, \lambda \neq 5, x = 0 \Rightarrow y = 0$. $\text{Ker}(f - \lambda I) = \{0\}$

2. Si $\lambda = 2$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

E_2 est la droite de base $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

3. Si $\lambda = 5$

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

E_5 est la droite de base $e_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (2 - \lambda)x + y + z = 0 \\ x + (2 - \lambda)y + z = 0 \\ x + y + (2 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x + (-\lambda + 1)y = 0 \\ (-\lambda + 1)x + (\lambda^2 - 4\lambda + 3)y = 0 \end{cases}$$

$$(\lambda^2 - 5\lambda + 4)y = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 4)y = 0$$

1. Si $\lambda \neq 1, \lambda \neq 4, y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow z = 0$. $\text{Ker}(f - \lambda I) = \{0\}$

2. Si $\lambda = 1$

$$x + y + z = 0$$

E_1 est la droite de base (e_1, e_2) où $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. Si $\lambda = 4$

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$-3x + 3y = 0 \Rightarrow x = y = z$$

E_4 est la droite de base (e_3) où $e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$C - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (1 - \lambda)x = 0 \\ -\lambda y - z = 0 \\ y + (2 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

Si $\lambda \neq 1, x = 0$

$$(-\lambda^2 + 2\lambda - 1)z = 0$$

$$(\lambda^2 - 2\lambda + 1)z = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

Donc on a aussi, si $\lambda \neq 1, z = 0, y = 0$

La seule valeur propre possible est 1.

Si C était diagonalisable, on aurait $C=I$, donc C n'est pas diagonalisable.

Pour la matrice E, on a :

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour la matrice F, on a :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \text{ et } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour la matrice G, on a :

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ et } P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 5 :

La seule valeur propre est 1. $I = P^{-1}MP$. $P = MP$. $I = M$.

M est diagonalisable si $a = 0$.

Exercice 6 :

$$1. B = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 12 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ donc } B^2 = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 12 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 & 12 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 2 & -4 & 10 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B^3 = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 12 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 2 & -4 & 10 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$A = B - I$ donc $A^n = (-I + B)^n$

$$A^n = (-1)^n I + n(-1)^{n-1} B + \frac{(-1)^{n-2} n(n-1)}{2} B^2$$

$$(A + I)^3 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

Donc A n'est pas diagonalisable.

Exercice 7 :

$$1. D = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2. D' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3. A = PD'P^{-1}$$

$$B = A^2 = PD'^2P^{-1}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Donc } A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$