Licence 2 - SDV 2008-2009

UE Mathématiques appliquées à la biologie

TD4 – Equations différentielles

Exercice 1 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer la fonction f dérivable sur $\Re$ telle que :

1. $\begin{cases} f'+2f=0 \\ f(1)=3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3f'-2f=0 \\ f(3)=-1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2f'=f \\ 2f(-1)=3 \end{cases}$
4. $\begin{cases} f-2f'=0 \\ f(0)=3 \end{cases}$

Exercice 2 :

f est une fonction définie et dérivable sur $\Re$ telle que : $\begin{cases} 4f'-3f=0 \\ f(0)=1 \end{cases}$.

Répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes :

1. La courbe représentative de f passe par le point A de coordonnées $\left(1;\frac{3}{4}\right)$.
2. La courbe représentative de f a, au point d'abscisse 0, une tangente de coefficient directeur 1.
3. f est une fonction croissante sur $\Re$.
4. f est solution de l'équation différentielle 16y''-9y=0

Exercice 3 :

Un fil conducteur parcouru par un courant électrique d'intensité constante s'échauffe par effet Joule et sa température, en degrés Celsius, est une fonction θ du temps t exprimé en secondes. On choisit l'instant de mise sous tension comme origine des temps (t=0) et, à cet instant, la température du conducteur est égale à 0°C. Dans les conditions de l'expérience, la fonction θ est telle que $\theta'(t)+0{,}1\theta(t)=2$

1. Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t)=\theta(t)-20$

Monter que f est une solution de l'équation différentielle (E) : y'+0,1y=0

2. Résoudre l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'expression de θ(t).
4. Quelle température atteint le conducteur au bout de 10 secondes, 30 secondes, 1 minute ? Calculer la limite de θ(t) quand t tends vers $+\infty$.

Exercice 4 :

On considère une population de papillons dont la croissance est logistique (capacité de charge K = 500 individus et taux de croissance r = 0.1 individus / individus. mois. Pour quel effectif la vitesse de croissance de la population est elle maximale (redémontrez la formule) ? Calculez cette vitesse maximale.

Exercice 5 :

Une population de mouches est suivie en laboratoire. La population initiale compte 300 individus et on les laisse se reproduire librement. On mesure dans cette population un taux de natalité de 0.07 / individu / semaine et un taux de mortalité de 0.03 /individu / semaine.

1. Quel est l'effectif au bout d'1 semaine ? Quel le taux de croissance R de cette population ? Calculez également le facteur d'accroissement λ (= N_{t+1}/ N_t)
2. Quel sera l'effectif au bout de 11 semaines ?
3. Pour plus de simplicité, on veut approximer par une loi exponentielle continue. Calculez le taux de croissance continue r de cette population.

La population de mouches se stabilise au bout de quelques années à environ 1000 individus.

4. Comment expliquez vous ce phénomène ? Ecrivez la nouvelle équation de dynamique de cette population.
5. Calculez les vitesses de croissances de la population quand la population comprend 50 individus, puis 400, 900, 1000 et 1100. Proposez des explications biologiques à ce que vous observez.
6. À quel effectif atteint-on la vitesse maximale d'expansion d'une population ?

Exercice 6 :

Soit x l'écart à la capacité de charge K (x < K).

1. Démontrer que la vitesse de diminution de la taille de la population à N=K+x est supérieure à la vitesse d'augmentation à N=K-x.
2. A votre avis, dans quelles situations l'effectif peut-il dépasser la capacité de charge K ?

Exercice 7 :

On modélise l'évolution naturelle, lorsqu'il n'y a pas d'exploitation, de la population des baleines de l'océan atlantique par la dynamique suivante :

$$y'=0,08y\left(1-\frac{y}{400\,000}\right)$$

1. De quel type de modèle s'agit-il ? Que représentent les constantes 0,08 et 400000 ?
2. On suppose que $y(0)>0$. Que pouvez-vous dire de $\lim_{t\to+\infty} y(t)$?
3. A l'issue d'une longue période de surexploitation, on estime que l'effectif de cette population de baleines est tombé à 70000. En supposant qu'on interdit alors son exploitation, calculer, une approximation de son évolution y_0, y_1, y_2 ..., en prenant un pas de temps h=1. Pour ce faire, on utilisera la méthode d'Euler, qui, pour l'équation $y'=f(x)$, s'écrit :

$$\begin{cases} t_n = t_{n-1} + h \\ y_n = y_{n-1} + hf(y_{n-1}) \end{cases}$$

4. On suppose que l'on autorise un quota de pêche, et la dynamique est alors :

$$y'=0,08y\left(1-\frac{y}{400\,000}\right)-3000$$

Indiquer quels sont les équilibres pour cette nouvelle dynamique et précisez leur stabilité.

5. Comment va varier la population de baleines dans ce cas, sachant que $y(0)=70000$?
6. Reprendre les 3 dernières questions en supposant cette fois qu'au-delà du quota légal des activités de pêche illicites portent le modèle à $y'=0,08y\left(1-\frac{y}{400\,000}\right)-5000$.