



TD6 – Applications sous Excel

L'objectif de ce TD est d'approximer numériquement la dynamique d'un système représenté par des équations différentielles. Les exemples proposés sont ceux vus en cours ou dans le cadre des TDs et se rapportent à la dynamique des populations.

Le principe sous-jacent est d'approximer chaque équation différentielle $\frac{dx}{dt} = \dots$, par une forme récursive, exprimant x_{t+1} en fonction de x_t , en partant d'une condition initiale x_0 connue. C'est la méthode la plus simple de résolution numérique d'équations différentielles, appelée méthode d'Euler.

Un classeur Excel, nommé « TD6.xls » est associé à ce TD et contient des feuilles pré-remplies correspondant aux différents modèles de dynamique des populations abordés.

Exercice 1 :

Nous allons tout d'abord appliquer la méthode d'Euler pour visualiser une dynamique de population de type exponentiel. L'équation différentielle s'exprime sous la forme suivante :

$$P_{t+1} = P_t + rP_t .$$

Où r correspond au taux de croissance de la population.

On travaillera dans l'onglet « Modèle Exponentiel » de la feuille de calcul fournie.

1. Complétez la cellule B7 avec l'expression de l'équation exponentielle, en vous assurant d'utiliser des références aux cellules pertinentes et en faisant attention d'utiliser des références absolues si nécessaire.
2. Copier / coller la formule dans les cellules en dessous jusqu'à la cellule B106.
3. Tracer une courbe de la taille de population en fonction de l'année.
4. Que voyez-vous sur la courbe ?
5. Modifier la valeur de la population initiale pour la passer à 50. Que se passe-t-il ?
6. Modifier la valeur du taux de croissance et essayer les valeurs 0,01 ; 0,1 ; 10. Que se passe-t-il ?

Exercice 2 :

Le modèle exponentiel n'est pas satisfaisant : considérer que la population à un instant $t+1$ est strictement proportionnelle à la population au temps t conduit à des situations aberrantes avec des populations très grandes à terme. Le modèle logistique vise à pallier à ces problèmes en supposant qu'il y a un nombre maximum d'individus qui peuvent être supportés par un milieu : c'est la capacité du milieu. L'équation différentielle s'exprime sous la forme :

$$P_{t+1} = P_t + rP_t \left(1 - \frac{P_t}{K} \right)$$

Où r correspond au taux de croissance de la population et K à la capacité du milieu.

On travaillera dans l'onglet « Modèle Logistique » de la feuille de calcul fournie.

1. Complétez la cellule B7 avec l'expression de l'équation logistique, en vous assurant d'utiliser des références aux cellules pertinentes et en faisant attention d'utiliser des références absolues si nécessaire.
2. Copier / coller la formule dans les cellules en dessous jusqu'à la cellule B106.
3. Tracer une courbe de la taille de population en fonction de l'année.
4. Sur le même graphe tracer la droite $P(t)=K$. A qui correspond cette courbe ?

4. Que voyez-vous sur la courbe ?
5. Modifier la valeur de la population initiale pour la passer à 150. Que se passe-t-il ?
6. Modifier la valeur de la capacité du milieu pour la placer à 200.
6. Modifier la valeur du taux de croissance et essayer les valeurs 0,01 ; 0,1 ; 2 ; 3. Que se passe-t-il ?

Exercice 3 :

L'exploitation d'une population (par exemple des poissons) est classiquement représentée par des modèles de pêche. Ces modèles ajoutent au modèle logistique un terme correspondant au nombre d'individus qui sont retirés du milieu au cours de l'exploitation de la population (par exemple par la pêche).

Ce terme peut s'exprimer de plusieurs façons :

- dans le modèle linéaire, il est proportionnel de la population à l'instant t, ce qui conduit à une expression du type :

$$P_{t+1} = P_t + rP_t \left(1 - \frac{P_t}{K}\right) - EP_t$$

Où E correspond à l'effort de pêche.

- dans le modèle avec quotas, il s'agit d'une constante, ce qui conduit à une expression du type :

$$P_{t+1} = P_t + rP_t \left(1 - \frac{P_t}{K}\right) - Q$$

On travaillera dans l'onglet « Modèle de pêche » de la feuille de calcul fournie.

1. Complétez les colonnes D et G avec l'expression du terme correspondant à la pêche dans les deux modèles, en vous assurant d'utiliser des références aux cellules pertinentes, en faisant attention d'utiliser des références absolues si nécessaire et en vous assurant que le résultat soit toujours positif (avec un \$!).
2. Compléter les colonnes B et E avec l'équation logistique, moins le terme de pêche correspondant à chaque modèle, les colonnes C et F contenant les valeurs de P_t ajustées pour être toujours positives.
3. Que voyez-vous sur les courbes correspondantes ?
5. Modifier la valeur de l'effort de pêche pour le passer à 0,5 puis 0,6. Que passe-t-il ?
6. Modifier la valeur du quota pour le passer à 300. Que se passe-t-il ?

Exercice 4 :

Plusieurs modèles permettent de représenter la dynamique de populations vivant dans le même milieu. Le modèle de compétition simule des populations qui n'interagissent pas selon une relation de type proie / prédateur mais sont en compétition pour de la nourriture, des abris, etc. On considère alors que chaque espèce a un effet e sur les autres. Dans un cas à deux espèces, on peut alors représenter la dynamique des deux populations sous la forme :

$$N_1(t+1) = \frac{r_1 N_1(t)(K_1 - N_1(t) - e_1 N_2(t))}{K_1} \quad \text{et} \quad N_2(t+1) = \frac{r_2 N_2(t)(K_2 - N_2(t) - e_2 N_1(t))}{K_2}$$

On travaillera dans l'onglet « Modèle compétition » de la feuille de calcul fournie.

1. Complétez les colonnes B et C avec l'expression des équations du modèle, les colonnes D et E contenant les valeurs de $N(t)$ ajustées pour être toujours positives.
3. Que voyez-vous sur les courbes de population et les courbes dans l'espace de phase ?
5. Modifier les populations initiales pour les mettre à $N_1=70$ et $N_2=10$. Que passe-t-il ?
6. Modifier les populations initiales pour les mettre à $N_1=60$ et $N_2=60$, ainsi que le taux de croissance de l'espèce 1 pour le mettre à 0,5. Que se passe-t-il ?
7. Passer le taux de croissance de l'espèce 1 à 2 et les populations initiales à $N_1=20$ et $N_2=20$. Que se passe-t-il ?

Exercice 5 :

Dans le cas de deux espèces où l'une consomme l'autre, on peut utiliser un modèle de proie-prédateur. Classiquement, on part du modèle logistique. Pour les proies, on y ajoute un terme indiquant qu'une quantité de proies proportionnelle à la quantité de prédateur meurt du fait de la prédation. Pour les prédateurs, leur population croît du fait de la conversion des proies chassées en bébés prédateurs et décroît en fonction d'un taux de mortalité. Au final on obtient les équations suivantes :

$$N_{t+1} = N_t + rN_t \left(1 - \frac{N_t}{K}\right) - aP_t \quad \text{et} \quad C_{t+1} = C_t - qC_t + afC_t N_t$$

Où N est la population de proies, C la population de prédateurs, r le taux de croissance des proies, K la capacité du milieu en proies, a le taux d'attaque des prédateurs, q le taux de mortalité des prédateurs et f le taux de conversion des proies en bébés prédateurs.

On travaillera dans l'onglet « Modèle proie-prédateur » de la feuille de calcul fournie.

1. Complétez les colonnes B et C avec l'expression des équations du modèle, les colonnes D et E contenant les valeurs de N(t) et C(t) ajustées pour être toujours positives.
3. Que voyez-vous sur les courbes de population et les courbes dans l'espace de phase ?
5. Modifier la population initiale en proies pour la passer à $N_0=200$. Que passe-t-il ?
6. Ramener la population initiale en proies à $N_0=20$ et changer la capacité du milieu en proies pour la passer à $K=300$. Que se passe-t-il ?
7. Passer le taux de croissance de l'espèce 1 à 2 et les populations initiales à $N_1=20$ et $N_2=20$. Que se passe-t-il ?