



TD3 – Corrigé

Exercice 1 :

Pour $X=2$, on cherche les combinaisons de 2 carrés parmi les 13 possibles avec un jeu de 52 cartes, associés à une carte prise parmi les $52-2 \times 4=44$ restantes. On évalue la probabilité d'avoir cette main parmi les combinaisons de 9 cartes possibles avec 52 cartes.

$$p(X = 2) = \frac{C_{13}^2 \times C_{44}^1}{C_{52}^9}$$

Pour $X=1$, on cherche les combinaisons de 1 carré, associées à 5 cartes parmi les 48 restantes. Ces 5 cartes ne doivent pas contenir un carré, donc on enlève les combinaisons contenant un carré parmi les cartes restantes. On évalue la probabilité de cet événement comme précédemment.

$$p(X = 1) = \frac{C_{13}^1 \times (C_{48}^5 - C_{12}^1 \times C_{44}^1)}{C_{52}^9}$$

Pour $X=0$, on cherche la probabilité de n'avoir ni 2, ni 1 carré, soit :

$$p(X = 0) = 1 - (p(X = 2) + p(X = 1))$$

Exercice 2 :

Pour $X=0$, on cherche la probabilité de tirer les 3 boules rouges parmi les 3, sachant qu'on tire 3 boules parmi les 5.

$$p(X = 0) = \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10}$$

Pour $X=1$, on cherche de combien de façons on peut tirer 2 boules rouges et une verte, sachant qu'on tire 3 boules parmi les 5.

$$p(X = 1) = \frac{C_2^1 \times C_3^2}{C_5^3} = \frac{6}{10}$$

Pour $X=2$, on cherche ensuite comment tirer 1 boule rouge et 2 vertes, sachant qu'on tire 3 boules parmi les 5.

$$p(X = 2) = \frac{C_2^2 \times C_3^1}{C_5^3} = \frac{3}{10}$$

Exercice 3 :

1. On répète 10 fois successivement, et de manière indépendante, la même épreuve consistant à répondre à une question en choisissant au hasard et de manière équiprobable une réponse parmi les quatre proposées. Chaque épreuve a donc une probabilité de réussite égale à $p=0,25$ et une probabilité d'échec égale à $q=1-p=1-$

0,25=0,75. Le nombre de succès X parmi les 10 répétitions suit donc une loi binomiale de paramètre 10 et 0,25.

2. On a ainsi :

$$p(X = 8) = C_{10}^8 \times 0,25^8 \times 0,75^2 = \frac{10 \times 9}{2} \times 0,25^8 \times 0,75^2 = 0,0004$$

$$p(X = 9) = C_{10}^9 \times 0,25^9 \times 0,75^1 = 10 \times 0,25^9 \times 0,75^1 = 2,86 \times 10^{-5}$$

$$p(X = 10) = C_{10}^{10} \times 0,25^{10} \times 0,75^0 = 0,25^{10} = 9,54 \times 10^{-7}$$

$$p(X \geq 8) = p(X = 8) + p(X = 9) + p(X = 10)$$

Exercice 4 :

On répète 1500 fois successivement et de manière indépendante la même épreuve consistant à rendre un caractère sur une page. Chaque épreuve a une probabilité de réussite (caractère bien rendu) égale à $p=0,9$ et une probabilité d'échec (caractère mal rendu) égale à $q=1-p=0,1$. La probabilité d'avoir des caractères mal rendus suit une loi binomiale de paramètres (1500,0.1).

$$p(X = 2) = C_{1500}^2 \times 0,1^2 \times (1 - 0,1)^{1500-2} = \frac{1500!}{2!} \times 0,1^2 \times (1 - 0,1)^{1498} = 3,2 \times 10^{-65}$$

Exercice 5 :

X suit une loi normale de moyenne 0 et de variance 1.

$$1. p(Z < -0,643 ; 0,643 < Z) = 0,52$$

$$p(|Z| > 0.706) = 0,48$$

$$p(Z > 0.10) = p(|Z| > 0,10)/2 = 0,92/2 = 0,46$$

$$p(Z > -1.555) = 1 - p(|Z| > 1.555)/2 = 1 - 0,12/2 = 0,94$$

$$p(Z < 1.2) = 1 - p(Z > 1.2) = 1 - p(|Z| > 1.2)/2 = 1 - 0,115 = 0,885$$

$$p(1.4 < Z < 2.3) = 1 - p(Z < 1.4) - p(2.3 < Z) = 1 - 1 + p(Z > 1.4) - p(Z > 2.3)$$

$$p(1.4 < Z < 2.3) = p(|Z| > 1.4)/2 - p(|Z| > 2.3)/2 = 0,08 - 0,01 = 0,07$$

$$2. p(|Z| > a) = 0.78 \Rightarrow a = 0,279$$

$$p(|Z| > a) = 0.05 \Rightarrow a = 1.960$$

$$p(Z > a) = 0.05 \quad 1/2 * p(|Z| > a) = 0.05 \Rightarrow p(|Z| > a) = 0.1 \Rightarrow a = 1.645$$

$$p(|Z| > a) = 0.01 \Rightarrow a = 2,576$$

Exercice 6 :

1. On cherche la probabilité que le diamètre d'une rondelle soit compris dans l'intervalle de conformité.

$$p(X \in [86,6;90,4]) = p(X - 90 \in [-0,4;0,4]) = p\left(\frac{X - 90}{0,17} \in [-2,35;2,35]\right)$$

$$p(X \in [86,6;90,4]) = 1 - p\left(\left|\frac{X - 90}{0,17}\right| > 2,35\right) \approx 1 - 0,02 = 0,98$$

2. On cherche un écart-type pour une loi normale telle que la probabilité que le diamètre d'une rondelle soit conforme soit supérieur à 0,99.

$$p(D \in [86,6;90,4]) = p(D - 90 \in [-0,4;0,4]) = p\left(\frac{D - 90}{\sigma_1} \in \left[\frac{-0,4}{\sigma_1}; \frac{0,4}{\sigma_1}\right]\right)$$

$$p\left(\frac{D - 90}{\sigma_1} \in \left[\frac{-0,4}{\sigma_1}; \frac{0,4}{\sigma_1}\right]\right) \geq 0,99 \rightarrow p\left(\frac{D - 90}{\sigma_1} \notin \left[\frac{-0,4}{\sigma_1}; \frac{0,4}{\sigma_1}\right]\right) \leq 0,01$$

$$\rightarrow \frac{0,4}{\sigma_1} \geq 2,576$$

$$\sigma_1 \leq 0,156$$

On peut vérifier que si on prend $\sigma_1 = 0,15$, on a bien $p\left(\frac{0,4}{\sigma_1}\right) = 0,996$ qui est bien ce que l'on cherche.

3. Pour n suffisamment grand, la loi binomiale de paramètre $B(n, p)$ peut être approchée par la loi normale de moyenne $\mu = np$ et d'écart type $\sigma = \sqrt{npq}$. Ici $\mu = 1000 \times 0,02 = 20$ et $\sigma = 4,43$.

4. la probabilité qu'il y ait au plus 15 rondelles non conformes est telle que :

$$p(Z \leq 15,5) = p(Z - 20 \leq -4,5) = p\left(\frac{Z - 20}{4,43} \leq -1,02\right) = p\left(\left|\frac{Z - 20}{4,43}\right| \geq 1,02\right) / 2 \approx 0,30 / 2 \approx 0,15$$

Exercice 7 :

1. Appelons X la variable aléatoire égale au nombre d'accidents recensés par jour; les valeurs possibles de X sont entières (variable discrète) et varient de 0 à 5. A chacune de ces valeurs x_i , on associe sa probabilité de réalisation p_i : nombre de jours d'apparitions divisé par 200. Le nombre moyen d'accidents par jours est alors l'espérance mathématique de X :

$$E(X) = \sum x_i p_i = (0 \times 86 + 1 \times 82 + 2 \times 22 + 3 \times 7 + 4 \times 2 + 5 \times 1) / 200 = 0,8 = 4/5$$

On peut énoncer qu'il y a en moyenne 0,8 accidents par jour ou, plus concrètement, 4 accidents en moyenne tous les 5 jours.

2. La loi de Poisson est la loi des "anomalies" indépendantes et de faible probabilité, on peut l'appliquer ici a priori directement, faute d'autres informations sur la survenue des accidents.

Nombre x_i d'accidents	0	1	2	3	4	5
Probabilités p_i	0,43	0,41	0,11	0,035	0,01	0,005

De plus, en notant que les accidents sont considérés comme des événements indépendants, on peut interpréter X comme une variable binomiale de paramètre $n = 200$ (nombre d'épreuves) de moyenne $np = 0,8$. Par suite $p = 0,004$. On est tout à fait dans le champ d'approximation de la loi de Poisson : $n > 50$, $p \leq 0,1$ et $np = 0,8 \leq 10$. Le paramètre de cette loi sera $\lambda = np = 0,8$ et :

$$p(X = k) = e^{-0,8} \times \frac{0,8^k}{k!}$$

3.

Nombre x_i d'accidents	0	1	2	3	4	5
Nombre de jours	86	82	22	7	2	1
p_i	0,43	0,41	0,11	0,035	0,01	0,005
p_i théoriques selon Poisson	0,449	0,359	0,144	0,038	0,008	0,001
p_i selon loi binomiale	0,448	0,360	0,144	0,038	0,0075	0,001

La probabilité de voir survenir moins de 3 accidents est théoriquement $0,449 + 0,359 + 0,144 = 0,952$.

Le nombre théorique de jours où il se produit moins de 3 accidents est donc $0,952 \times 200 = 190,4$, nombre arrondi à 190. Le nombre fourni *par la réalité* (statistique) est : $86 + 82 + 22 = 190$. On remarque un bon ajustement par la loi de Poisson. Le cas $k = 5$ est moins convaincant mais il est marginal.

Exercice 8 :

Soit X la variable aléatoire correspondant au temps moyen passé sur une voiture et Y la variable aléatoire correspondant au nombre de défauts.

Les valeurs possibles pour X sont 2 (voitures à 0 défauts), 2,5 (voitures à 1 défaut), 3 (voitures à 2 défauts) et 6 (voitures à au moins 3 défauts).

Y suit une loi de Poisson de paramètre 2.

Le temps moyen passé sur une voiture correspond à l'espérance mathématique de X .

$$E(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} ip(X=i) = 2 \times p(Y=0) + 2,5 \times p(Y=1) + 3 \times p(Y=2) + 6 \times p(Y \geq 3)$$

$$E(X) = 2e^{-2} \frac{2^0}{0!} + 2,5e^{-2} \frac{2^1}{1!} + 3e^{-2} \frac{2^2}{2!} + 6 \sum_{k=3}^{+\infty} e^{-2} \frac{2^k}{k!}$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kp(X=k) = 2e^{-2} \frac{2^0}{0!} + 2,5e^{-2} \frac{2^1}{1!} + 3e^{-2} \frac{2^2}{2!} + 6 \sum_{k=3}^{+\infty} e^{-2} \frac{2^k}{k!}$$

$$\text{Or } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \text{ donc } E(X) = 2e^{-2} + 5e^{-2} + 6e^{-2} + 6e^{-2} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} - \sum_{k=0}^2 \frac{2^k}{k!} \right) = 13e^{-2} + 6e^{-2} \left(e^2 - 2^0 - 2^1 - \frac{2^2}{2} \right)$$

$$E(X) = 13e^{-2} + 6e^{-2}(e^2 - 5) = 6 - 17e^{-2} \approx 3,7$$

Exercice 9 :

1. La probabilité que la distance parcourue sans incident soit :

a. comprise entre 50 et 100 km :

$$p(50 \leq D \leq 100) = \int_{50}^{100} \frac{1}{82} e^{-\frac{x}{82}} dx = F(100) - F(50) = -e^{-\frac{100}{82}} + e^{-\frac{50}{82}} \approx 0,248$$

b. supérieure à 300 km :

$$p(D \geq 300) = 1 - p(D \leq 300) = 1 - \int_0^{300} \frac{1}{82} e^{-\frac{x}{82}} dx = 1 - F(300) + F(0) = -e^{-\frac{300}{82}} \approx 0,026$$

2. Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 km sans incident, la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains km correspond à :

$$p(D \geq 375 / D \geq 350) = \frac{p((D \geq 375) \cap (D \geq 350))}{p(D \geq 350)} = \frac{p(D \geq 375)}{p(D \geq 350)} = \frac{e^{-\frac{375}{82}}}{e^{-\frac{350}{82}}} = e^{-\frac{375}{82}} \times e^{\frac{350}{82}} = e^{-\frac{25}{82}} \approx 0,737$$

On pourrait calculer directement cette probabilité conditionnelle de la manière suivante :

$$p(D \geq 375 / D \geq 350) = p(D \geq 350 + 25 / D \geq 350) = p(D \geq 25) = e^{-\frac{25}{82}} \approx 0,737$$

En effet, D suit une loi de durée de vie sans vieillissement. Cela signifie que l'autocar n'a aucune mémoire de son passé, ou plus précisément, le fait que cet autocar ait parcouru un nombre de kilomètres K sans incident ne change pas la probabilité de la survenue d'un incident dans les kilomètres qui suivent.

Par exemple, que l'autocar ait parcouru au moins 100km ou moins 200km sans incident, la probabilité qu'il rencontre un incident dans les 25 km suivants est la même.